

Beweis des Satzes: wir zeigen

exemplarisch

$$f' \text{ wachsend} \Rightarrow f \text{ konvex}$$

für " $\Leftarrow$ " benutzt man die Monotonie

des Quotienten aus Satz 10.4.

Seien $0 < t < 1$ und $x < y$ ^{O.E.} Zu zeigen:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \iff$$

$$\left. \begin{aligned} (1-t) [f((1-t)x + ty) - f(x)] &\leq \\ t [-f((1-t)x + ty) + f(y)] &\end{aligned} \right\} \textcircled{*}$$

l. S. von $\textcircled{*}$ ^{MWS} $= (1-t) \cdot t(y-x) \cdot f'(x_1)$
mit $x_1 \in (x, (1-t)x + ty)$

r. S. von $\textcircled{*}$ ^{MWS} $= t(1-t)(y-x) \cdot f'(x_2)$
mit $x_2 \in ((1-t)x + ty, y)$

also gilt $\circledast$ wegen $f'(x_2) \geq f'(x_1)$. $\square$

Noch eine Anwendung:

Seien $x_1, \dots, x_n > 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$
mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Dann gilt:

$$x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

Speziell: $\lambda_i = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

(allg. Ungl. zwischen arith. u. geom. Mittel)

Beweis: für konvexe f gilt (2f + Induktion)

$$\begin{cases} f\left(\sum_{i=1}^n t_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(y_i), \\ 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \end{cases}$$

(bzw. „ $\geq$ “, falls f konkav)

$$\ln \text{ ist } \boxed{\text{Konkav}} \Rightarrow \ln\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln x_i; \quad \text{benutze exp auf}$$

beiden Seiten $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \geq \exp\left(\sum_{i=1}^n (\ln x_i) \lambda_i\right) =$$

$$\prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i \ln x_i) = \prod_{i=1}^n \exp(\lambda_i \ln x_i) =$$

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i}$$



VII. Die Taylor Formel

ab jetzt: I Intervall, $a \in I$ innerer
Punkt und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

• f stetig in $a \iff$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{|x - a|^0} = 0$$

f ist lokal bei a durch die konstante
Funktion $x \mapsto f(a)$ von 0^{ter} Ordnung gut
approximierbar

• f diff'bar in $a \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)}{|x-a|^1} = 0$

..... durch die affin lineare Fkt.
 $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ von 1^{ter} Ordnung
gut approximierbar

Notation:

Sei f n -mal diff'bar

in der Nähe von a .

Die Polynomfit

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\textcircled{n}} b_k (x-a)^k$$

(von der Ordnung n)

approximiert

f bei a

gut, falls

$$f(a) = P(a), \quad f'(a) = P'(a), \dots, \quad f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a).$$

Dann folgt für die Koeffizienten b_k :

$$\begin{cases} f(a) = b_0, & f'(a) = b_1, & \dots, \\ f^{(n)}(a) = n! \cdot b_n, \end{cases}$$

also:

$$\boxed{b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$$

$k=0, \dots, n$

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit der guten Approximation

der Ordnung n

Def. 11.5 : Existieren für ein
 $n \in \mathbb{N}$ die Ableitungen $f^{(k)}(a)$,
 $k=0, \dots, n$, so heißt

$$(T_{n,a} f)(x) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k$$

das Taylorpolynom der Ordnung n
zu f in a .

$$(R_{n,a} f)(x) := f(x) - (T_{n,a} f)(x)$$

heißt Restglied der Ordnung n
zu f bei a .

Bem: 1.) Achtung: $\text{Grad}(T_{n,a} f) \leq n$,

falls $f^{(n)}(a) = 0$.

2.) überlege:

$$\begin{aligned} & f \text{ Polynom vom Grad } m \implies \\ & T_{n,a} f = f \quad \forall n \geq m \end{aligned}$$

Das folgt auch aus

Satz 11.15: Sei I ein Intervall,
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(n+1)$ -mal diff'bar
 auf I und a ein innerer Punkt von I .

Zu $x \in I$ existiert dann ein ξ
zwischen x und a mit

$$f(x) = (T_{n,a} f)(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-a)^{n+1}.$$

Man bekommt die

Restgliedformel von
Lagrange

$$(R_{n,a} f)(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta) (x-a)^{n+1}$$

Bem: 1.) f Polynom vom Grad $m \Rightarrow \dots$

2.) die Zwischenstelle η hängt von x
(und a) ab.

3.) f $\mathbb{R}$ -wertig, da MWS benutzt wird.

Vor dem Beweis eine Anwendung:

Satz 11.16: Sei $f \in C^\infty(I)$. Für
ein $K \in [0, \infty)$ gelte

$$\sup_I |f^{(n)}| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Dann gilt für alle $a \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k, \quad x \in I.$$

▽ Die sogenannte Taylorreihe von f in a ▽
 • konvergiert und stellt f dar. •

Beweis von 11.16 mit 11.15: Nach 11.15 ist

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k \right| =$$

$$|(R_{n,a} f)(x)| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| |x-a|^{n+1} \leq$$

$$K \cdot \frac{1}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\left(\text{benutze } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |x-a|^k = e^{|x-a|} < \infty \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k!} |x-a|^k \longrightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad \square$$

Achtung: $f \in C^\infty$ reicht nicht, um
auf $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x-a)^n$

zu schließen! ∇

Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

- $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

- $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ Taylorreihe $\equiv 0$, aber $f \neq 0$!

Beweis von Satz 11.15:

Sei $x > a$ fest.

Auf $[a, x]$ setze

$$\begin{aligned} \underline{\underline{g(t)}} &:= f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) \\ &\quad - \dots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \\ &\quad - A \cdot \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$= f(x) - \left(T_{n, \underline{\underline{t}}} f \right)(x) - A \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

mit einem Parameter $A \in \mathbb{R}$.

Unabhängig von A gilt:

$$\boxed{g(x) = 0}$$

Wähle A so, dass auch

$$\boxed{g(a) = 0}$$

MWS $\Rightarrow \exists \eta \in (a, x)$ mit

(*)

$$\boxed{\frac{d}{dt} g(\eta) = 0}$$

beim Berechnen der Ableitung von g
 ergeben sich Kürzungseffekte, etwa

$$\frac{d}{dt} \{ f(t) + f'(t)(x-t) \} =$$

$$f'(t) + x f''(t) - \frac{d}{dt} (f'(t)t) =$$

$$f'(t) + x f''(t) - f''(t)t - f'(t) =$$

$$f''(t)(x-t) \quad \left. \begin{array}{l} \text{die 1. Ableitung} \\ \text{von } f \text{ ist "weg"} \end{array} \right\}$$

$\vdots$
 $\Rightarrow$

$$g'(t) = - f^{(n+1)}(t) \frac{1}{n!} (x-t)^n + A \frac{1}{n!} (x-t)^n$$

$$\Downarrow (*), t = a$$

$$A = f^{(n+1)}(a)$$

Setze dies in die Def. von g ein, wähle

$t = a$ und beachte $g(a) = 0 \Rightarrow$ Beh. $\square$

Bem: 1.) andere Schreibweise in -409-

der Restgliedformel von Lagrange: ($x = a + h$)

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\vartheta h) h^{n+1}$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$.

2.) Sei $f^{(n+1)}$ auf einer Umgebung von

a beschränkt $\implies$ f und $T_{n,a}f$

stimmen in a von n ter Ordnung überein,

d.h.: $\exists$ stetige Funktion r mit

$r(a) = 0$ und

$$f(x) - (T_{n,a}f)(x) = r(x) (x-a)^{n+1}$$

Beispiel :

$$\ln 2 = ?$$

-410-

$$f(x) := \ln x, \quad x > 0; \quad a := 1 \implies$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! x^{-k}, \quad k \geq 1;$$

$$\text{sei } h > 0 \implies \exists \varrho \in (1, 1+h)$$

$$\left| (R_{n,1} \ln)(1+h) \right| = \frac{1}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\varrho) \right| h^{n+1} \leq$$

$$\frac{1}{(n+1)!} n! \cdot \frac{h^{n+1}}{\varrho^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} h^{n+1}$$

$\varrho \geq 1$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{falls } \boxed{h \leq 1}$$

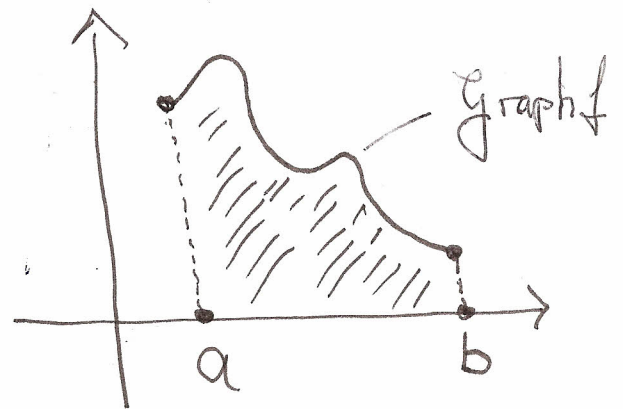
$$h=1 \implies \boxed{\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}}$$

$$\text{gemäß } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(1) (x-1)^k$$

§ 12 Integralrechnung (für Regelfunktionen)

Ziele: 1.) „Stammfunktionen“ $\leadsto$ finde zu f
- systematisch F mit $F' = f$

2.) Flächenberechnung



Vorgehensweise:

1.) $f: [a, b] \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$, $f \equiv c$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx := c(b-a)$$

(„Rechteckfläche“)

2.) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise konstant

(Treppenfunktion) $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx :=$

$\sum$ der Rechteckflächen

3.) betrachte alle $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$,
 die durch Treppenfunktionen f_n approximiert
 werden können (Regelfunktionen) $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Bem: es gibt zwei weitere Integralbegriffe

Riemann

und

Lebesgue - Integral

etwas allgemeiner

sehr viel allgemeiner
 als Riemann (Ana III)

merke: für z.B. stetige $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$
 sind alle Integralbildungen gleich ∇

I. Integration von Treppenfunktionen (T.F.)

Seien $a < b$ aus $\mathbb{R}$.

- 413 -

Def 12.1

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt T.F. : $\Leftrightarrow$

$\exists$ Zerlegung $Z := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

von $[a, b]$ mit

$\gamma \equiv c_i$ auf (x_{i-1}, x_i)

Man setzt dann:

$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}).$$

$$\int_a^b \gamma(x) dx :=$$

andere Notation:
 $\left[\int_a^b \gamma dx, \int_a^b \gamma d\ldots \right]$

Bem: 1.) γ hat also nur endlich viele

Werte, die Werte $\gamma(x_i)$ spielen bei der

Berechnung von $\int_a^b \gamma(x) dx$ keine Rolle. ∇

2.) Zeige:

γ T.F. $\Rightarrow \int_a^b \gamma(x) dx$ unabhängig
von Z ∇

D.h. : Ist $Z^I = \{a = x_0^I < x_1^I < \dots < x_m^I = b\}$ eine 2^{te} Zerlegung von $[a, b]$ mit $\gamma = c_j^I$ auf (x_{j-1}^I, x_j^I) , so muss gelten

$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^m c_j^I (x_j^I - x_{j-1}^I)$$

3.) $\mathcal{J}([a, b]) := \{\text{alle T.F. } [a, b] \rightarrow \mathbb{C}\}$
 ist ein $\mathbb{C}$ -V.R., und für $\gamma \in \mathcal{J}([a, b])$ gilt:

$$\|\gamma\| := \sup_{a \leq t \leq b} |\gamma(t)| < \infty$$

(Norm von γ)

(dadurch wird $\mathcal{J}([a, b])$ zum normierten Raum)

-415-

Satz 12.1 (Eigenschaften von $\int_a^b$ auf $\mathcal{I}$)

i) $\int_a^b$ ist eine lineare Abbildung

$\mathcal{I}([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$, d. h. :

$$\int_a^b (\alpha \varphi + \beta \psi) dx = \alpha \int_a^b \varphi(x) dx + \beta \int_a^b \psi(x) dx$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{I}([a, b])$.

ii) Integralabschätzung :

$$\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x)| dx \\ \leq \|\varphi\| (b-a).$$

iii) Monotonie: φ, ψ $\mathbb{R}$ -wertig mit

$$\varphi \leq \psi \text{ auf } [a, b] \implies$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx.$$

Beweis: ii) $\left| \int_a^b f dx \right| =$

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |c_i| (x_i - x_{i-1})$$

$$= \int_a^b |f| dx, \text{ da } |f| \in \mathcal{J}([a, b]) \text{ mit}$$

$|f| \equiv |c_i|$ auf (x_{i-1}, x_i) ; die ^{letzte} Abschätzung

folgt aus $|c_i| \leq \|f\|$.

ii), iii): $Z_{f, \psi}$ = Zerlegung für f, ψ

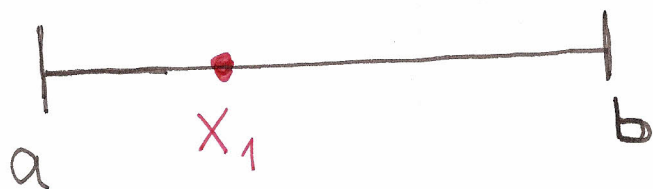
$$\Rightarrow Z := Z_f \cup Z_\psi := \{a = z_0 < \dots < z_N = b\}$$

Zerlegung für f und ψ , d.h.

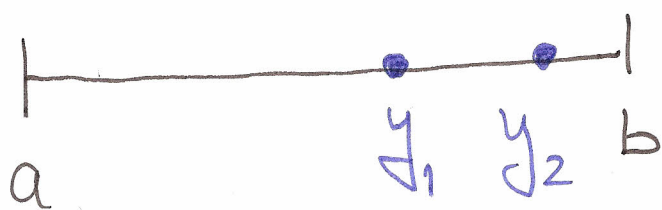
$$(*) \quad f_i \equiv c_i, \quad \psi_i \equiv d_i \quad \text{auf } (z_{i-1}, z_i)$$

Beispiel:

-417-



$$Z_f = \{a, x_1, b\}$$



$$Z_\psi = \{a, y_1, y_2, b\}$$

$$\Rightarrow Z = \{a, x_1, y_1, y_2, b\}$$

Dann ist

$$\int_a^b (\alpha \varphi + \beta \psi) dx \stackrel{\text{Def}}{=} \leq$$

$$\sum_{i=1}^N (\alpha c_i + \beta d_i) (z_i - z_{i-1}) =$$

$$\alpha \sum_{i=1}^N c_i (z_i - z_{i-1}) + \beta \sum_{i=1}^N d_i (z_i - z_{i-1}) =$$

$$\alpha \int_a^b \varphi dx + \beta \int_a^b \psi dx ;$$

für (i,i) benutze $c_i \leq d_i$ auf (z_{i-1}, z_i) .

